

高性能 LPF である FDNR 型フィルタの仕組みをお勉強してみる（前編）

LC フィルタから始まり、GIC 回路、負性抵抗など謎が深い

著者：石井 聡

はじめに

アナログ・デバイス入社後に「アナログ・フィルタ設計を究めてみたい」と思うようになりました。その目的のために図 1 [1]や図 2 [2]などの書籍を（古いものなので中古本ですが）かなりの冊数購入し、勉強してきました。

それぞれから、アクティブ・フィルタの設計についてはかなりのところまで理解することができ、その成果をこの WEB ラボの記事として、[3]に掲載できました。しかしその記事にもあるように、アクティブ・フィルタであればフィルタ特性カーブの式を（平方根に相当する計算をしたうえで）因数分解すればよかったのですが、パッシブ・フィルタではここにさらに「もう一歩」の計算（[1]では「PQ 法」と呼んでいます）が必要で、これがまたさらに高度であり難儀するものでした。考え方は [1]を読むことで理解はできましたが、素子定数の導出の公式を得ることができない状態でストップしています。

ネットをサーチすると、[4]に具体的な計算式が出ていますとあります。Amazon での古本の出品でも 15,000 円と 18,000 円（汗）の 2 冊のみで、探究断念モードの昨今では購入に至る動機を見つけることができません…（汗）。同書の筆者の渡部和氏は、[5]によると日本電気株式会社で回路網理論と CAD の研究を行い、その後に事業本部長、支配人、常務理事まで歴任し、さらにその後には創価大学教授となった方だそうです（数年後には工学部長にまで！）。20 年以上ラインの管理職をされたようで、その多忙な経験をしたのちに大学教授に転身されたこと、その明晰な頭脳（技術職を離れて長く管理職でありながら、高い技術力をさびつかせず維持されていたこと）に驚きを禁じえません。

その今回もアクティブ・フィルタ理論のネタ

[3]でアクティブ・フィルタの考え方について示しましたが、また今回もアクティブ・フィルタのネタで行きたいと思います。今回は、聞くことは少ないけれども高性能なフィルタ、FDNR（Frequency Dependent Negative Resistor）型フィルタの深い海溝にダイビングしてみます。書き始め前のたゞいまは、どんな深海泳ぎ（？）ができるやら、皆目見当がついておりません（汗）。

しかし…、どうもフィルタ設計にはトラウマがあるようで、この WEB ラボのネタとしても増加気味になっています。皆様、同じような料理しかご提供できず、すいません…。

FDNR 型フィルタとは何者？

FDNR 型フィルタは原理上 LPF 構成が基本となりますが、高い Q 値が必要なフィルタ回路（つまり通過域から遮断域までの遷移が急峻な場合やフィルタ次数が高い場合）など、特殊なケースで威力を発揮します。

さて、図 3 のような信号源抵抗 R_S 、負荷抵抗 R_L をもつ LC によるパッシブ LPF（この例はチェビシェフ型 0.5dB リプル）があったとします。

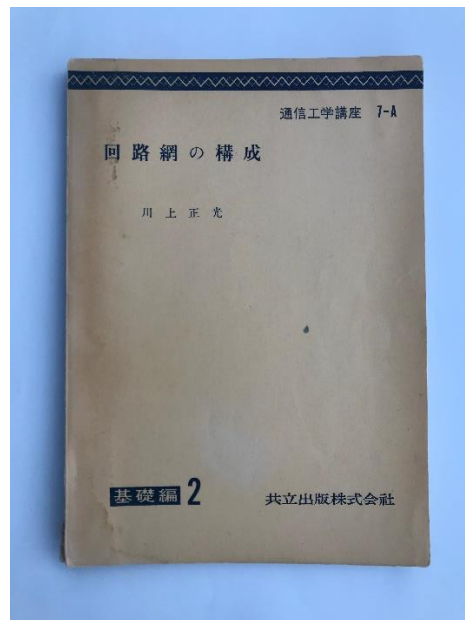


図 1. アナログ LC フィルタ設計の古典中の古典『回路網の構成 [1]』



図 2. アナログ・アクティブ・フィルタ設計の古典『アクティブ・フィルタの設計 [2]』

アナログ・デバイス株式会社は、提供する情報が正確で信頼できるものであることを期していますが、その情報の利用に関して、あるいは利用によって生じる第三者の特許やその他の権利の侵害に関して一切の責任を負いません。また、アナログ・デバイス社の特許または特許の権利の使用を明示的または暗示的に許諾するものでもありません。仕様は、予告なく変更される場合があります。本紙記載の商標および登録商標は、それぞれの所有者の財産です。
©2020 Analog Devices, Inc. All rights reserved.

Rev. 0

アナログ電子回路技術ノート

TNJ-070

FDNR型フィルタは、この図3のような、その特性の原型となる LC フィルタ（パッシブ・フィルタ）の設計からスタートします（図3の素子定数は図5の原型となるものです）。原型 LC フィルタの設計自体の理論は（「はじめに」にも示したように）非常に難しいのですが、素子定数を計算できるソフトウェア・ツールや数表があるので、一般的にはそれを用います。

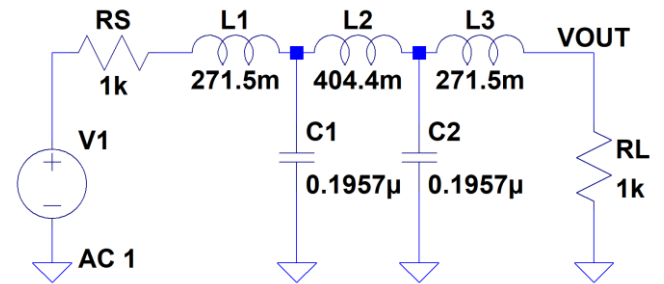
この LC フィルタの伝達関数を「 $1/s$ 変換」（ s はラプラス演算子）というものを施すことにより、それぞれの素子は図4のように、インダクタは抵抗、抵抗はコンデンサ、コンデンサはFDNR（Frequency Dependent Negative Resistor; 周波数依存性負性抵抗）なるものに変換されます。

$1/s$ 変換は L. T. Bruton が発明したため「Bruton 変換（Bruton Transformation）」とも呼ばれています [6]。FDNR は図4のようなシンボルが用いられるようです [6]。この技術ノートでもその表記に合わせています。この FDNR について、このシリーズでは詳しく説明していきます。

面白いことに、パッシブ回路の伝達関数に $1/s$ 変換を施しても、回路の信号伝達特性は同じまとなります。回路の伝達関数の分子、分母それぞれに $1/s$ がかかることで、それを s 倍したと考えると、結果的に $1/s$ を消すことができるから（元に戻すことができるから）です。

FDNR への変換では「 $1/s$ 変換」をおこなう

図3の LC フィルタを $1/s$ 変換して得た図4の回路を FDNR 型フィルタとしたものが、図5になります。なお以降で改めて説明しますが、図3をそのまま $1/s$ 変換した図4の定数ではインピーダンスが低すぎるため、1000 倍にスケールアップしています。



.ac dec 5000 1 1meg

図3. 信号源抵抗と負荷抵抗をもつパッシブ LC LPF 回路
（FDNR 型フィルタを構成する原型になる回路。チェビシェフ型 0.5dB リプル）

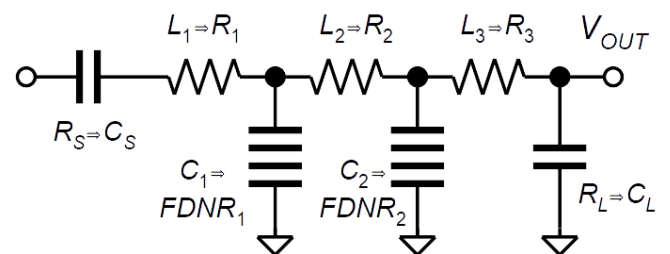


図4. 図3のパッシブ LC LPF を $1/s$ 変換により変換した回路

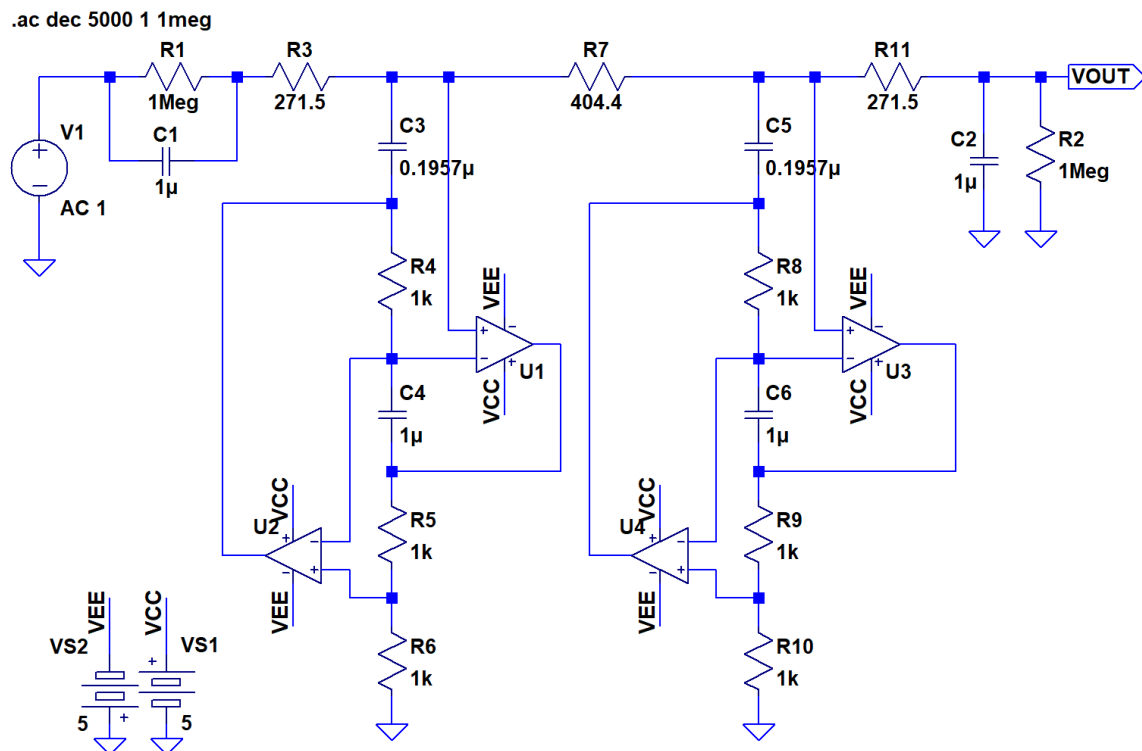


図5. 図4の回路を FDNR 型フィルタとして実現した（インピーダンスが 1000 倍になるようスケールアップ構成してある。OP アンプは UniversalOpamp2 という LTspice の OP アンプ汎用モデルを用い、開ループ利得 $A_{vol} = 10M$ 、利得帯域幅 $GBW = 100MHz$ としている）

アナログ電子回路技術ノート

TNJ-070

さて、この $1/s$ 変換について変換の仕方を見ていきましょう。
リアクタンスと純抵抗を基本として変換していきます。まず図
3の大きさ L [H]をもつインダクタンスのリアクタンスは

$$X_L(f) = j2\pi fL \text{ [}\Omega\text{]} \quad (1)$$

ここで f は周波数です。これをラプラス演算子 s ($s = j2\pi f$) で
表すと

$$X_L(s) = sL \quad (2)$$

さらにこれを $1/s$ 変換した素子は

$$\frac{X_L(s)}{s} = L \text{ [}\Omega\text{]} \quad (3)$$

となり、周波数 f (もしくはラプラス演算子 s) の影響を受けな
い、抵抗値が L となる抵抗素子になります。つまりインダクタン
スは $1/s$ 変換により抵抗素子に変換されます。

つぎに抵抗を考えます。大きさ R [Ω]の抵抗のインピーダンス
(純抵抗) は

$$Z_R(f) = R \text{ [}\Omega\text{]} \quad (4)$$

です。これをラプラス演算子 s で表しても当然ながら

$$Z_R(s) = R \quad (5)$$

です。さらにこれを $1/s$ 変換した素子は

$$\frac{Z_R(s)}{s} = \frac{R}{s} = \frac{1}{sC_R} = \frac{1}{j2\pi fC_R} \quad (6)$$

となり周波数 f (もしくはラプラス演算子 s) の関数となる素子、
容量値 C_R が $1/R$ となるコンデンサになります。つまり抵抗は $1/s$
変換によりコンデンサに変換されます。

最後にコンデンサを考えます。容量が C [F]のコンデンサのリア
クタンスは

$$X_C(f) = \frac{1}{j2\pi fC} \quad (7)$$

です。これをラプラス演算子 s で表すと

$$X_C(s) = \frac{1}{sC} \quad (8)$$

さらにこれを $1/s$ 変換した素子は

$$\frac{X_C(s)}{s} = \frac{1}{s^2C} = -\frac{1}{(2\pi f)^2C_{FDNR}} \quad (9)$$

となり、周波数 f の自乗に反比例する関数、それも「周波数に
依存する負性抵抗素子」という、なんだか不思議な素子になり
ます。なお相当する素子としての大きさは、元々の容量値と同
じ ($C = C_{FDNR}$) になります。

これがFDNR (Frequency Dependent Negative Resistor; 周波数依
存性負性抵抗) です。コンデンサは $1/s$ 変換によりFDNRに変換さ
れるわけです。このFDNRはそれこそ不思議に感じる素子では
ないでしょうか。

さてともあれ、上記の計算手順から、図3の L_1, L_3 に相当する抵
抗は271.5 mΩ、 L_2 相当は404.4 mΩとなります。これは非常に
低い抵抗値です。そのため図5では基準となるインピーダンス
を1000倍してあり、271.5 Ω、404.4 Ωとして常用的な素子定数
に、また他の素子定数もそれぞれインピーダンスが1000倍にな
るように構成してあります。図3の素子定数から図5に相当す
る素子定数をそれぞれ直接得てみると、一般的にその定数が不
適切になります (上記の L_1, L_2, L_3 の例もそうですね)。

それぞれ計算した値をまとめておくと (インピーダンスを1000
倍した結果として)、

$$R_S \Rightarrow C_S = \frac{1}{R_S} = 1\mu\text{F}$$

$$R_L \Rightarrow C_L = \frac{1}{R_L} = 1\mu\text{F}$$

$$L_1 \Rightarrow R_1 = 271.5 \text{ }\Omega$$

$$L_3 \Rightarrow R_3 = 271.5 \text{ }\Omega$$

$$L_2 \Rightarrow R_2 = 404.4 \text{ }\Omega$$

$$C_1 \Rightarrow C_{FDNR1} = 0.1957\mu/1000$$

$$C_2 \Rightarrow C_{FDNR2} = 0.1957\mu/1000$$

しかしFDNR素子の単位は何になるんでしょうね! (笑)

シミュレーションで確認してみる

図6に図3の原型LCフィルタの周波数応答特性を、図7に図5
のFDNR型フィルタの周波数応答特性をそれぞれ示します
(LTspiceでのシミュレーション)。それぞれ下の図は縦軸を細
かく0.5dBステップにしたものです。まったく同じ結果になっ
ていることが分かります。なお図7では違いが見えませんが
(-180dB付近で生じる違いなので)、高い周波数ではOPア
ンプの周波数特性の限界から、FDNR型フィルタのほうがフィル
タ特性が劣化しています。

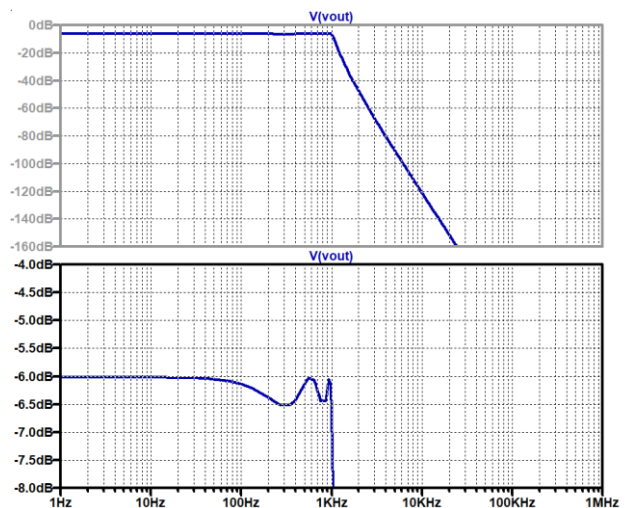


図6. 図3の原型LCフィルタの周波数特性 (LTspiceでの
シミュレーション)

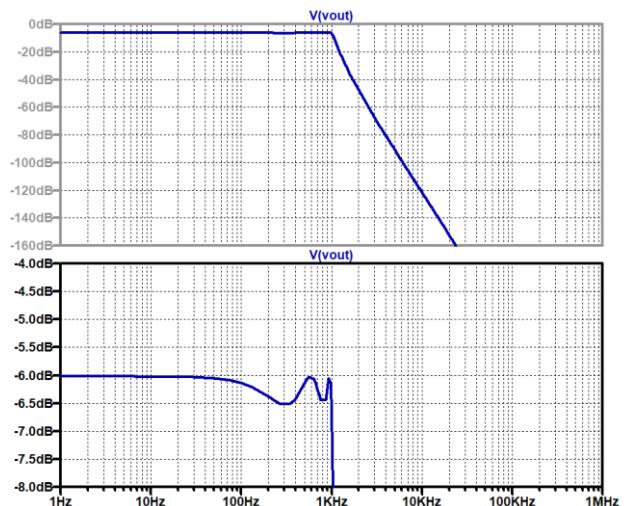


図7. 図5のFDNR型フィルタの周波数特性を原型LCフィルタ
(図6)と比較すると全く同じ (同シミュレーション)

アナログ電子回路技術ノート

TNJ-070

GIC 回路とは何者？

FDNR は図 8 の GIC (Generalized Impedance Converter) 回路というもので構成します。GIC 回路は任意のインピーダンスを構成できる回路です。GIC 回路は図 8 のグラウンドに向けて接続される複数の直列素子経路と、そこにつながる 2 つの OP アンプから形成されます。そして端子 Z_{in} から見たインピーダンスを

$$Z_{in} = \frac{Z_1 Z_3 Z_5}{Z_2 Z_4} \quad (10)$$

として得ることができます。たとえば Z_2, Z_4, Z_5 を $R = Z_2 = Z_4 = Z_5$ となる抵抗素子 R として、 Z_1 に相当するコンデンサを C_{G1} 、 Z_3 に相当するコンデンサを C_{G3} として選べば、

$$Z(f) = \frac{-1}{(2\pi f)^2 C_{G1} C_{G3} R} \quad (11)$$

として FDNR、つまり周波数依存性負性抵抗を実現できます。ここに図 5 の素子定数を代入してみると、 $C_{G1} C_{G3} R = 0.1957E-9$ となり、図 4 の C_1, C_2 を $1/s$ 変換し、インピーダンスを 1000 倍したときの定数と合致していることも分かります。またこの式 (11) の符号がマイナスですので、負性抵抗となります。

なお以降に示す図 10 の GIC 回路には、抵抗 R_7 が並列に接続されています。これは OP アンプのバイアス抵抗に相当するもので、式 (11) ではこの素子は除外しています、というより元々は無いものです。GIC 回路/FDNR としての本質的なものではありません。

式 (11) から、図 8 の GIC 回路を FDNR に構成できるトポロジは、

- ① Z_1, Z_3 を容量にし、それ以外は抵抗とする
- ② Z_1, Z_5 を容量にし、それ以外は抵抗とする
- ③ Z_3, Z_5 を容量にし、それ以外は抵抗とする
- ④ Z_2, Z_4 をインダクタにし、それ以外は抵抗とする

の 4 種類の方法があることに気がつきます。でも④は実用的ではありません。[7] の Figure 8.47 に回路図として、①～③の 3 トポロジの説明がありますが、残念ながら下の 2 素子と OP アンプとの接続点に間違いがあるようです (それでも一応図 9 に示しておきます)。

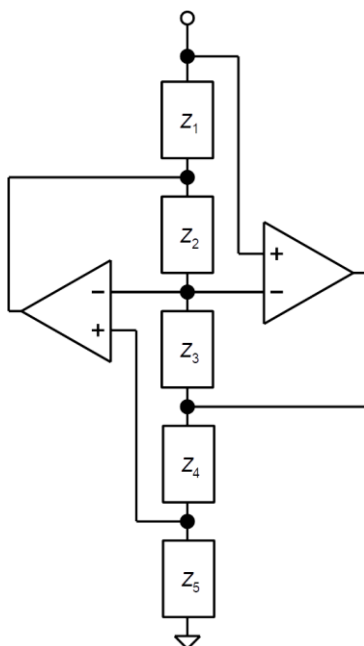


図 8. GIC (Generalized Impedance Converter) 回路の基本構成

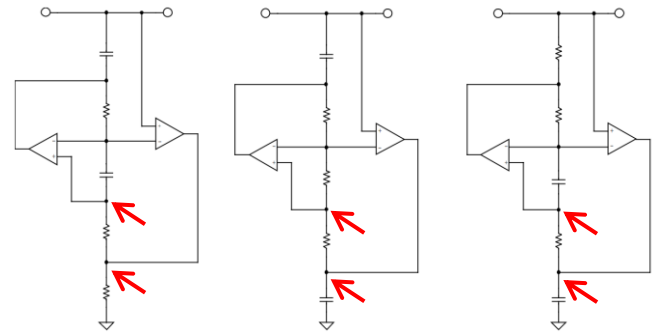


図 9. 図 8 の GIC 回路で FDNR を構成する [7] [下の 2 素子と OP アンプとの接続点 (赤矢示) に間違いがある]

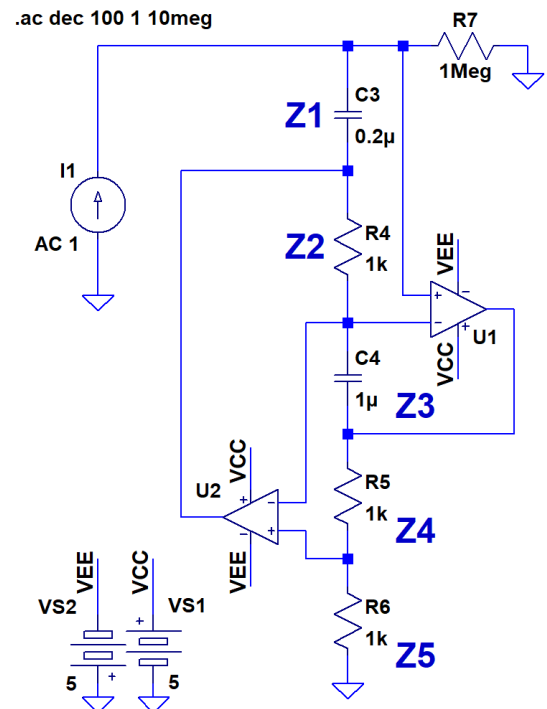


図 10. 図 8 の GIC 回路で FDNR を構成した LTspice 回路 (OP アンプは図 5 同様で UniversalOpamp2 を使い、開ループ利得 $A_{vol} = 10M$ 、利得帯域幅 $GBW = 100MHz$ に設定)

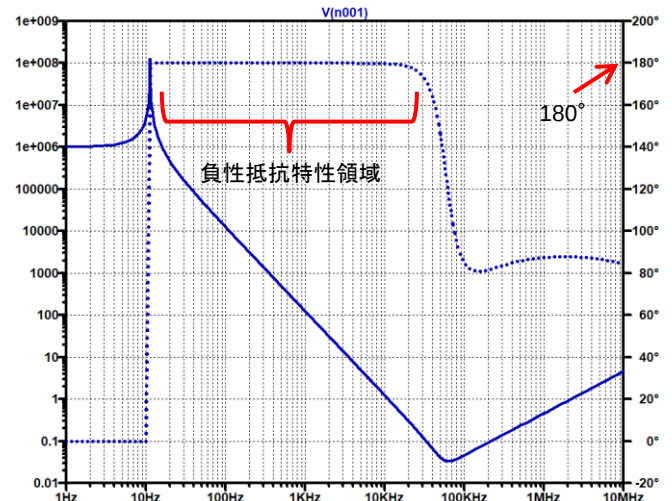


図 11. 図 10 の FDNR の周波数特性

アナログ電子回路技術ノート

TNJ-070

また Z_2 もしくは Z_4 のどちらかの素子をコンデンサにして、それ以外を抵抗とすれば、 Z_{in} から見たインピーダンスをインダクタンスにすることもできます。これを「シミュレーテッド・インダクタンス」と呼びます。

FDNR の周波数依存性負性抵抗特性をシミュレーションしてみる

つづいて式(11)に相当する FDNR の構成にした図 10 の GIC 回路 (図 9 においては一番左のトポロジ) で、周波数依存性負性抵抗特性をシミュレーションしてみます。

シミュレーション結果を図 11 に示します。20Hz から 20kHz に亘って位相が 180° になっています。位相が 180° とは、この周波数帯でこの回路が「負性抵抗特性」を示すことに相当します。式(11)を図 10 の部品番号に置き換えておくと、

$$Z(f) = \frac{-1}{(2\pi f)^2 C_3 C_4 R} \quad (12)$$

FDNR はその振幅 (負性抵抗値) 特性が式(12)のように周波数 f の自乗に反比例するのですが、図 11 でもオクターブ (2 倍) 周波数で 12dB の傾斜になっており、たしかに目的の周波数依存性負性抵抗特性が実現できていることも分かります。

とはいっても「20Hz から 20kHz」のとおり、FDNR が実現できる周波数帯域は限界があります。この帯域限界のことも考慮して FDNR を活用する必要もありますね。この件は次回の技術ノートで深く解析していきたいと思います。

負性抵抗とは何者？

図 12 に負性抵抗の考え方を示します。同図中の左は「一般的な抵抗」です。図中の向きに電圧を加えると、赤矢印の方向、つまり下方向に (抵抗に向かって) 電流が流れます。

いっぽう同図中の右が「負性抵抗」となるもので、図中の向きに電圧を加えると、左の「一般的な抵抗」と逆に、加えた方向に向かって電流が流れ出る (青矢印のように上方向に、抵抗から出てくるように) ことになります。負性抵抗では電流の流れる向きが逆なわけですから、オームの法則としても

$$-R = \frac{V}{-I} \quad (13)$$

として表すことができます。 I の極性は図中の左の「一般的な抵抗」での電流の向きを仮定しており、そのため式(13)では符号がマイナスになります。そうすると式の左辺は「一般的な抵抗」で考えると抵抗値は R ですが、加わった電圧に「抵抗する」極性がマイナスで逆極性になります (「電流が打ち出の小槌のように出てくる」という感じでしょうか)。さらに FDNR であれば、この動作に f^2 の項がありますから、「Frequency Dependent」な負性抵抗となるわけですね。

FDNR 型フィルタの注意点

FDNR 型フィルタ出力は高いインピーダンスで受ける

図 5 の出力 V_{OUT} は電圧出力ですが、 C_2 が原型回路の負荷抵抗に相当するので、ここに別の負荷抵抗を接続することができません。 R_2 は上記のように OP アンプのバイアス抵抗となるものです。そのためこの端子はハイ・インピーダンス (ボルテージ・フォロワなど) で受ける必要があります。負荷抵抗値が有限だと周波数特性が変化してしまいます。

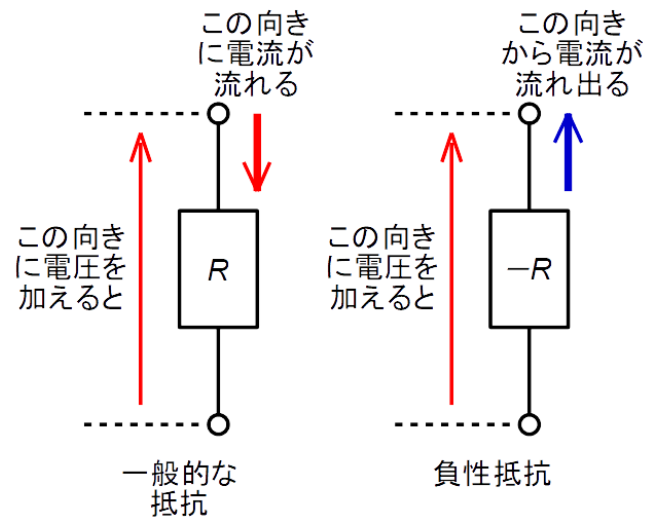


図 12. 負性抵抗の考え方

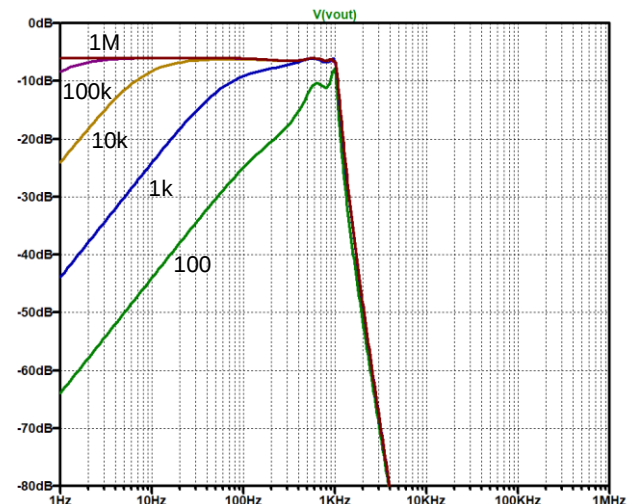


図 13. 図 5 の FDNR 型フィルタの負荷抵抗を変化させて周波数特性をシミュレーションしてみる (周波数特性が大きく劣化している)

ためしに図 5 の出力 V_{OUT} に負荷抵抗を接続して周波数特性をシミュレーションしてみたものを図 13 に示します。LTspice の .step ディレクティブで負荷抵抗値を 100Ω , $1k\Omega$, $10k\Omega$, $100k\Omega$, $1M\Omega$ としていますが、図 7 と周波数特性がおおきく異なっていることが分かります。当然ながら負荷抵抗値を低く (重く) すると劣化が大きくなります。

FDNR 型フィルタの入力は低いインピーダンスで駆動する

同じことが入力側にも言えます。図 4 のように信号源抵抗はコンデンサに変換されています。つまり FDNR 型フィルタとしては、信号源からゼロの出力インピーダンスで駆動されるものと仮定しているわけです。そのため実際の回路においても、FDNR 型フィルタの入力は低いインピーダンスで駆動する必要があります。

これも信号源抵抗値を変化させて LTspice でシミュレーションしてみると、特性変化 (劣化) を明確に確認できます。

アナログ電子回路技術ノート

TNJ-070

FDNR 型フィルタは入出力振幅が 1/2 になる

FDNR 型フィルタの注意点としては、図 3 の原型 LC フィルタが基本になるため、入出力振幅が 1/2 (−6dB) になることです。このようすは原型 LC フィルタを図 6 に、FDNR 型フィルタを図 7 に示しています。

図 3 の信号源抵抗 R_S 、負荷抵抗 R_L はそれぞれコンデンサ C_1 、 C_2 に $1/s$ 変換されます。直流回路で考えれば、振幅が 1/2 になるのは C_1 、 C_2 に充電される電圧が分担 (分圧) している状態に相当します。しかし現実には寄生抵抗成分などがあり、容量による単純な電圧分担は実現できません。

GIC 回路の OP アンプにバイアス電流を供給する (直流経路を形成する) ために抵抗を接続する必要がある

図 5 においては、 C_1 、 C_2 に並列に抵抗が接続されています。これは図 10 の GIC 回路のところでも説明しましたが、FDNR 型フィルタを構成するために本質的に必要なものではなく、フィルタ内の OP アンプにバイアス電流を供給する (直流経路を形成する) 都合があるためです。入出力のコンデンサ C_1 、 C_2 (もともとは図 3 の R_S 、 R_L に相当するもの) に並列に抵抗 R_1 、 R_2 を接続し、バイアス経路を確保します。こうしないと OP アンプが正しく動作できません。

図 5 では C_1 と C_2 が同じ定数なので、バイアス抵抗の R_1 、 R_2 も同じ定数が使えます。それにより結果的に、上記の「入出力振幅が 1/2 (−6dB)」という条件も直流〜低周波で実現できることになります。なお FDNR 型フィルタ動作に影響を与えないように、抵抗値を大きくする必要があります。

まとめ

FDNR 型フィルタは LC フィルタに「 $1/s$ 変換」 (s はラプラス演算子) というものを施すことで実現できる、ちょっと特殊なフィルタです。今回は FDNR 型フィルタの基本的な点、とくに GIC 回路と負性抵抗について考えてみました。なんだか直観的に理解が難しそうな、謎の深いフィルタ・トポロジということも分かりました。

次回では GIC 回路について、そして FDNR 型フィルタのさらに深いところにダイビングしてみます。

なお FDNR 型フィルタの説明については、参考文献[8]や[9]なども参照してください。とくに参考文献[9]に詳しく記載されています。

参考文献

- [1] 川上 正光; 回路網の構成, 共立出版
- [2] 柳沢 健, 神林 紀嘉; アクティブ・フィルタの設計, 産報
- [3] 石井 聡; LTspice でサレン・キー型フィルタ (第 1 回〜第 5 回), TNJ-044 ~ TNJ-048, 回路設計 WEB ラボ, アナログ・デバيز
- [4] 渡部 和; 伝送回路網の理論と設計, オーム社
- [5] 渡部和, Wikipedia, <https://ja.wikipedia.org/wiki/渡部和>
- [6] Frequency dependent negative resistor, Wikipedia, https://en.wikipedia.org/wiki/Frequency_dependent_negative_resistor
- [7] Hank Zumbahlen; Linear Circuit Design Handbook, Chapter 8 Analog Filters, Analog Devices. <https://www.analog.com/media/en/training-seminars/design-handbooks/Basic-Linear-Design/Chapter8.pdf>
- [8] 今田 悟, 深谷 武彦; 実用アナログ・フィルタ設計法【オゾンデマンド版】, CQ 出版社

[9] 特集 フィルタの設計と使い方, トランジスタ技術 SPECIAL No. 44, CQ 出版社

日記 2019 年 12 月 22 日 (日曜日)

この技術ノート執筆中の今日は令和元年の冬至。月日の巡りはまるでハイスピード・アナログ信号波形のよう。それでもこの冬至の日に、庭の木の「柚子」を、これから家族と自らの健康、無事と平穏を願い、末広がりの 8 個をバスタブに投入し、ひとり柚子湯を味わう (図 14)。市販品の柚子ではないので見て呉れ (みてくれ) は今一つだが、そんな端麗さなどは不要だ。自然の恵みのままなのだから。深い安堵とともに心から味わえばいいんだ。

※この技術ノート TNJ-070 の公開は 2020 年 12 月で、執筆からちょうど一年先の冬至の季節です。



図 14. 冬至に「柚子湯」。家族と自らの健康、無事と平穏の願いをこめて、末広がりの 8 個の柚子を投入